Førelesing ST1101

11.01.2021

Sciences that created statistics

- **Staatenkunde**

1660 i Tyskland. Samanliknande beskriving av statar med vekt på historie, ressursar og militær dyktigheit.

Ordet statistikk blei først brukt i 1749 av Aschenwald om saker som vedgår staten.

- **Politisk aritmetikk**

1662 i England. Kunsten å bruke figurar og tabellar til å trekke slutningar om ting relatert til styring av eit land.

Halley laga levetidsmodellar.
Dette blei brukt til berekne premie for livsforsikring.

Opphav til aktuaryrket og statistiske sentralbyrå.

Sciences that created statistics

- Sannsynsteori

1654 i Frankrike. Problem relatert til spel. Viktige namn:

Chevalier de Mere, Pascal, Fermat, Gauss, Laplace.

- Katalysatoren

Det var ingen teori eller metodar for innsamling eller analyse av data.

Adolphe Quetelet, belgisk matematikar, astronom, fysikar, sosiolog, antropolog og poet føreslo bruk av sannsynsrekning til å utvikle metodar for bruk på reelle data.

Frå 1870: Statistikk er vitenskapen om innsamling, presentasjon og analyse av data.

20. århundre: Ronald Aylmer Fisher (1890-1962).

Problem stilt av Chevalier de Mere

Sannsynet for å få 6 i eit kast med ein terning er 1/6.

Er sannsynet for å få 6 minst ein gong i 4 kast med ein terning lik 4/6?

Sannsynet for at ein får 2 seksarar i eit kast med to terningar er 1/36.

Er sannsynet for å få to seksarar minst ein gong i 24 kast med to terningar lik 24/36?

2.2 Utfallsrom og mengdelære

- Stokastisk forsøk

Prosedyre som
1. kan repeterast (teoretisk sett) uendeleg mange gonger)
2. har ei veldefinert mengde av utfall.

- Utfallsrom

Eit utfallsrom, S, er ei mengde av alle mogelge utfall av ei forsøk.

Utfallsrom er ikkje eintydige.

- Eksempel på utfallsrom

Eks 1. Kast med ein terning

S_1={jamn, odde}

S_2={1,2,3,4,5,6}

S_3={1∪2, 2∪3, 4, 5, 6} er ikkje utfallsrom (enkeltutfall kan ikkje overlappe)

Eks 2. Anette, Randi og Sylvia blir gravide om lag samstundes. Alle lurer på om dei får gut eller jente.

S={GGG, GGJ, GJG, GJJ, JGG, JGJ, JJG, JJJ}

Dersom utfallsrommet kan nummererast (er tellbart) blir det kalla diskret. Utfallrom kan og vere kontinuerlege.

Eks 3. Levetid av lyspærer i timar. $S = \{t|t \geq 0\}$

Hendingar

Ei hending er ei delmengde av utfallsrommet.

Gitt S. Resulterer eksperimentet i eit utfall e og $e \in$ A, seier vi at A har skjedd. Dersom $e \notin$ A, seier vi at A ikkje har skjedd.

Komplementet av ei hending A med omsyn på S,

A^C, er mengda av alle enkeltutfall i S som ikkje er med i A.

Den tomme mengde,
ϕ, er ei mengde som ikkje inneheld noko utfall

Eks 2. A = Det blir nøyaktig ein gut.

A={GJJ, JGJ, JJG}

Eks 3. A=Levetida for lyspærer er mindre enn 500 timar.

$$A = \{t | 0 \leq t \leq 500\}$$

Eks 2. A^C={GGG,GGJ,GJG,JGG,JJJ}

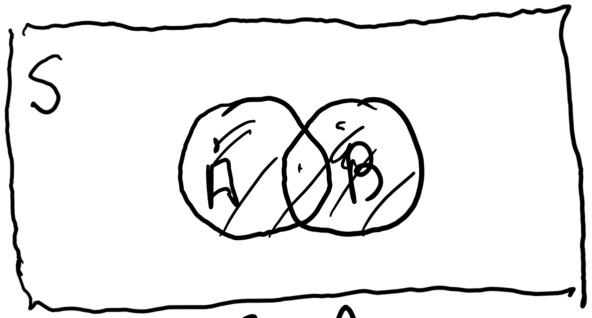
Mengdeoperasjonar

Ved hjelp av hendingar kan ein lage nye hendingar.

La A og B vere to hendingar.

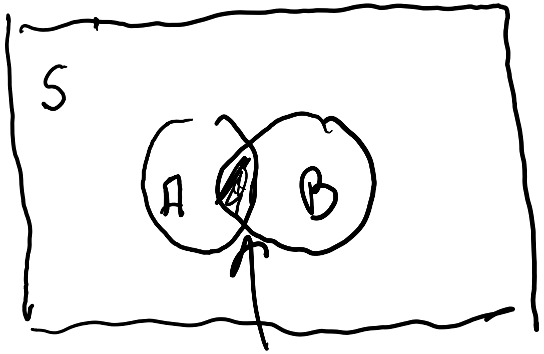
- AUB betyr at minst ei av hendingane skjer.
- A ∩ B betyr at begge hendingane skjer.

Venndiagram



$A \cup B$

$A \cup B = \{e \mid e \in A \text{ eller } e \in B\}$

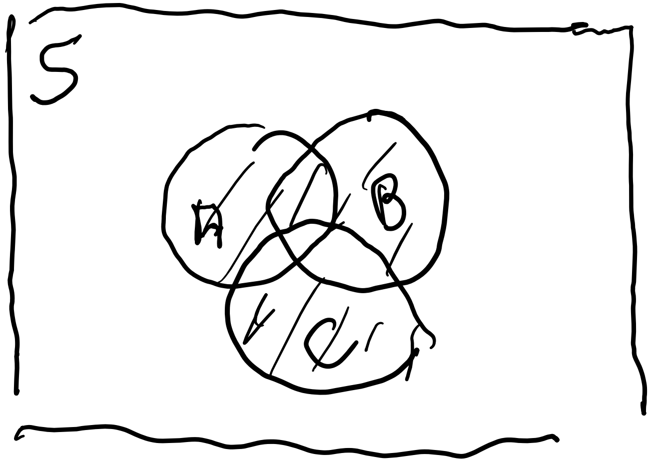


$A \cap B$

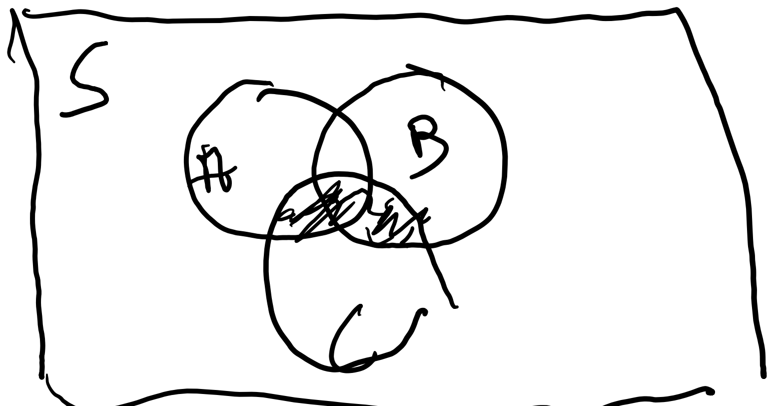
$A \cap B = \{e \mid e \in A \text{ og } e \in B\}$

A^c

$A^c = \{ e \mid e \notin A \}$

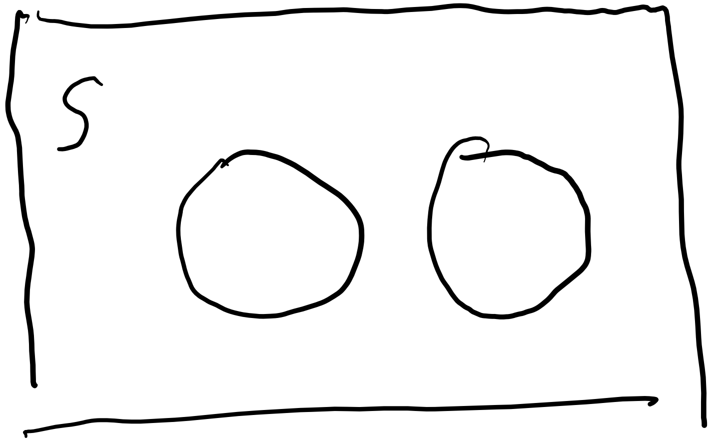


$A \cup B \cup C = \{ e \mid e \in A \text{ eller } e \in B \text{ eller } e \in C \}$



$(A \cup B) \cap C$

Definisjon. To hendingar A og B er gjensidig utelukkande (disjunkte) dersom $A \cap B = \emptyset$



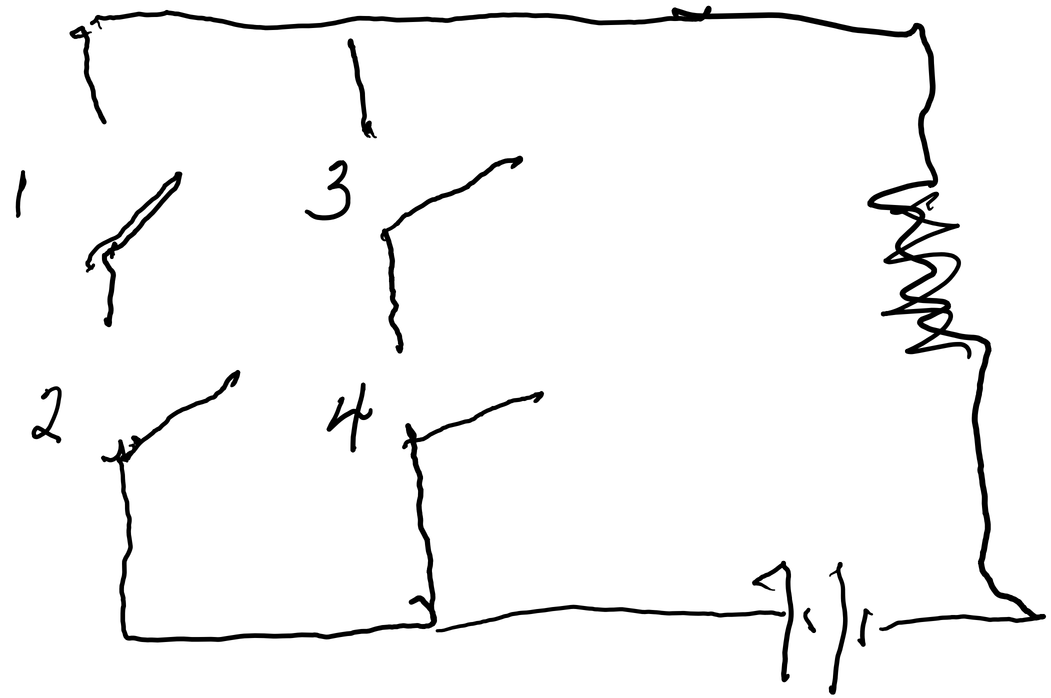
Eks. Kast med terning

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$

A og A^c er alltid disjunkte

Ues. Elektrisk straumkrets



A_i er hendinga av svitsj nummer i, $i = 1, 2, 3, 4$ feilar.

A er hendinga at det ikkje går straum

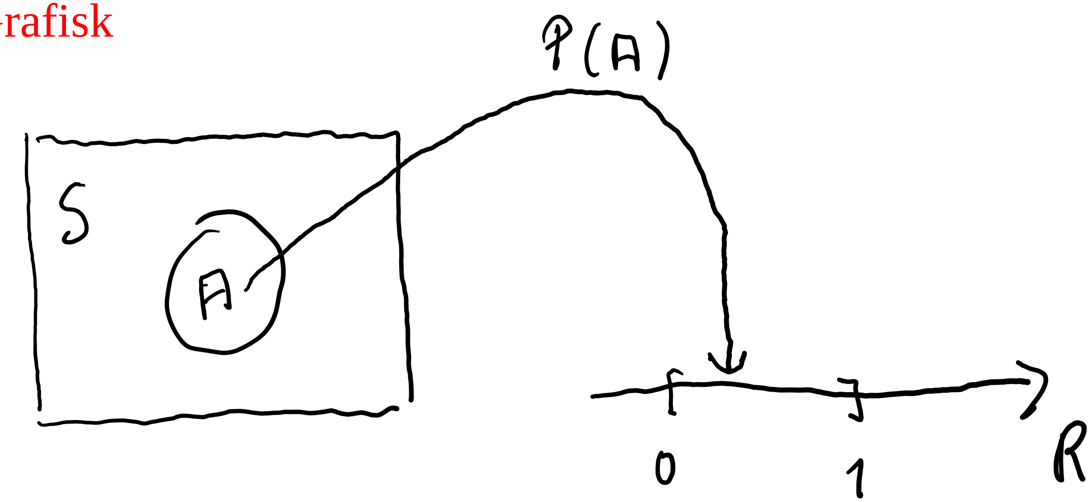
$$A = (A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)$$

2.3 Sannsyn

Eit sannsyn er ein funksjon frå S og inn i R som oppfyller.

- P(S) = 1
- P(A)≥0
- P(AUB)=P(A)+P(B) dersom $A \cap B = \phi$
- La $A_1, A_2, \ldots$ vere hendingar som oppfyller $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$. Då er $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

- Grafisk



NB! $A \cup A^c = S$

$\Rightarrow P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

Teorem 2.3.1. Det føl at $P(\phi) = 1 - P(S)$
$= 0$

$A \subset B$

$A^c \cap B$

$$B = A \cup (A^c \cap B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B) - P(A^c \cap B) \leq P(B) \quad \text{Teorem 2.3.3}$$

$$A \subset S \Rightarrow P(A) \leq P(S) = 1 \qquad \text{Teorem 2.3.4}$$

<u>Teorem 2.3.5</u>

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \subset S,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

<u>Prov</u>. $m = 2$ oppfylt frå aksiom 3.

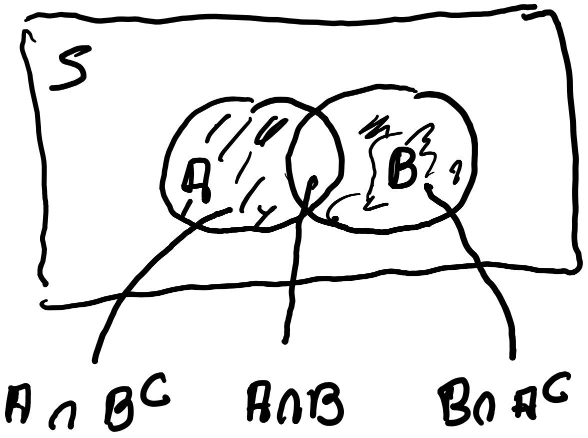
$m = 3$; $P(\underbrace{A_1 \cup A_2}_{B} \cup A_3) = P(B) + P(A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

Addisjonssetninga

Teorem 2.3.6 Addisjonssetninga

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prov.



$$A \cup B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) \cup (A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Generalisering

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$$